OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a VI-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

Notăm cu $P(X)$ produsul elementelor mulţimii X.
a) *Metoda I*
Presupunem contrariul. Cum $P(A) = P(M\backslash A)$, obţinem $P(M) = P(A) \cdot P(M\backslash A) = \big(P(A)\big)^2$, deci produsul elementelor lui M este pătrat perfect.
Dar, $P(M) = 10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, care nu este pătrat perfect.......3p
Metoda II
Presupunem contrariul. Cel mai mare număr prim din mulţimea M este 7. Exact una dintre mulţimile A şi $M\backslash A$ îl va conţine pe 7. Atunci, produsul elementelor acesteia va fi multiplu de 7, pe când al celeilalte nu. Deci, cele două produse nu pot fi egale........3p b) Este evident că $x = 7$.....1p
Un exemplu de partiţie a mulţimii $M\backslash\{7\}$ este: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $\{8, 9, 10\}$......3p (orice alt exemoplu se va puncta corespunzător).

SUBIECTUL II

a) Cel mai mic număr de drepte este una, care se obţine dacă cele 2010 puncte sunt coliniare......2p
b) Cel mai mare număr de drepte se obţine dacă oricare 3 puncte sunt necoliniare şi acest număr se obţine după formula $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2010\cdot 2009}{2} = 2019045$......2p
c) Dacă 2009 puncte sunt coliniare şi un punct este necoliniar cu acestea, atunci se obţin 2010 drepte, în toate celelalte cazuri se obţine un număr de drepte mai mare decat 2010, deci nu se pot obţine 2009 drepte......3p

SUBIECTUL III

$\triangle BAE$ este isoscel. Din $\widehat{DAC} \equiv \widehat{AEB}$, $\widehat{DAB} \equiv \widehat{ABE}$ şi $\widehat{DAC} \equiv \widehat{BAD}$ rezultă că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$ şi deci $\triangle BAE$ este isoscel. Analog, $\triangle CAF$ este isoscel.....2p
a) Observăm că $\triangle EAF \equiv \triangle CAB$ $(L.U.L)$ şi de aici $EF \equiv BC$ şi de aici $\triangle EBF \equiv \triangle CEB$ $(L.L.L)$.......2p
b) Din a) deducem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AEF}$. Cum $\widehat{AFC} \equiv \widehat{ACF}$, rezultă $\widehat{EFC} \equiv \widehat{BCF}$, adică $\triangle MFC$ este isoscel cu $FM \equiv CM$. Acum $\triangle MAF \equiv \triangle CAM$ $(L.L.L)$ implică MA bisectoarea $\widehat{FMC}$. Deoarece‘$\triangle MFC$ este isoscel, rezultă MA înălţime, adică $MA \perp CF$. Dar $FC \| AD$ implică $MA \perp AD$......3p